$S \geqslant 188{,}24\ \mathrm{mm}^2$

Pręt jest okrągły, więc jego średnicę wyznaczymy ze wzoru na pole koła. Śruba jest ścinana jednocześnie w dwóch przekrojach, co uwzględniamy poprzez podzielenie wyznaczonego pola powierzchni przez dwa w celu wyznaczenia średnicy śruby.

$$S = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$d \geqslant \sqrt{\frac{4S}{\pi}}$$

$$d \geqslant \sqrt{\frac{4 \cdot 94{,}12\ \mathrm{mm}^2}{\pi}}$$

$d \geqslant 10{,}9$ mm

2. Gdy znane są: pole powierzchni S i naprężenia dopuszczalne na ścinanie k_t, czyli materiał obliczanego elementu, wówczas maksymalną siłę ścinającą F, którą może przenieść element ścinany można wyznaczyć ze wzoru:

$$F \leqslant S k_t \tag{5.59}$$

Przykład. Mamy obliczyć, jaką maksymalną siłę obciążającą F może przenieść śruba z poprzedniego przykładu (patrz rys 5.23). Śruba jest narażona na ścinanie. Mamy dobrany materiał, z którego jest wykonana śruba – stal S275 (St 4), czyli znamy (na podstawie tabel) naprężenie dopuszczalne dla materiału śruby k_t = 85 MPa. Znając średnicę śruby (podaną przez konstruktora; nie może już ona ulec zmianie), możemy wyznaczyć pole ścinanych przekrojów S. Naszym zadaniem jest sprawdzenie (na podstawie podanego wzoru), jaką maksymalną siłę ścinającą przeniesie śruba.

Najpierw wyznaczamy pole powierzchni ścinanego przekroju śruby:

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 10^2}{4}\mathrm{mm}^2 = 78{,}53\ \mathrm{mm}^2$$

a następnie wyznaczamy maksymalną siłę ścinającą:

$F \leqslant S\, k_t$

Uwaga. Śruba jest ścinana jednocześnie w dwóch przekrojach, co uwzględniamy mnożąc wyznaczone pola powierzchni przez dwa:

$F \leqslant 2 \cdot 85\ \mathrm{MPa} \cdot 78{,}53\ \mathrm{mm}^2$

$F \leqslant 13350{,}1$ N

3. Gdy znana jest siła obciążająca (rozciągająca lub ściskająca) F i pole powierzchni S, to można wyznaczyć naprężenia dopuszczalne (na rozciąganie lub ściskanie) – czyli dobrać materiał obliczanego elementu na podstawie następującego wzoru:

$$k_t \geqslant \frac{F}{S} \tag{5.60}$$

Przykład. Trzeba określić, z jakiego materiału można wykonać śrubę mocującą alternator do kadłuba silnika, a więc należy wyznaczyć naprężenia dopuszczalne. Śruba jest narażona na ścinanie. Średnica otworu w podstawce, w którą ma wchodzić śruba, jest znana (podawana przez producenta alternatora i nie można jej zmienić) d = 10 mm, a więc możemy wyznaczyć pole przekroju ścinanego śruby S. Znamy ciężar alternatora i siłę naciągu paska, czyli siłę F = 120 N. Naszym zadaniem jest dobranie materiału śruby tak, aby w czasie pracy silnika nie została ona zniszczona (ścięta). Doboru dokonamy z tabel wytrzymałościowych na podstawie wyznaczonych ze wzoru naprężeń dopuszczalnych na ścinanie k_t. Śruba jest ścinana jednocześnie w dwóch przekrojach.

Najpierw wyznaczamy pole powierzchni ścinanego przekroju śruby:

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 10^2}{4} \text{mm}^2 = 78{,}53\ \text{mm}^2$$

a następnie wyznaczamy naprężenia dopuszczalne na ścinanie, czyli określamy rodzaj koniecznego materiału na obliczany element:

$$k_t \geqslant \frac{F}{S}$$

Uwaga. Śruba jest ścinana jednocześnie w dwóch przekrojach, co uwzględniamy mnożąc wyznaczone pola powierzchni przez dwa:

$$k_t \geqslant \frac{120\ \text{N}}{2 \cdot 78{,}53\ \text{mm}^2}$$

$$k_t \geqslant 0{,}76\ \text{MPa}$$

Z tabel wytrzymałościowych dobieramy materiał spełniający tę nierówność. Naprężenia w śrubie są bardzo niskie, więc nierówność spełni każda stal, dobieramy zatem najsłabszy materiał – jest nim stal S185 (St 0), dla której dopuszczalne naprężenia k_t = 65 MPa.

5.14. Zginanie

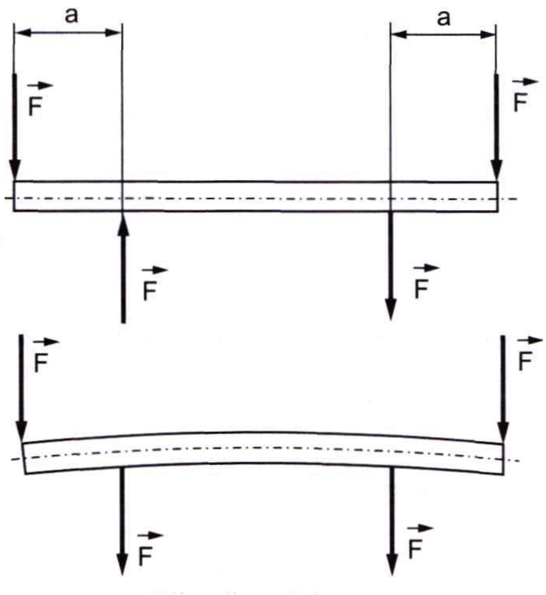
5.14.1. Podstawowe pojęcia związane ze zginaniem

Obciążenia zginające występują w wielu elementach pojazdów samochodowych. Najczęściej są na nie narażone osie i wały w silniku i mechanizmach napędowych samochodu. Elementy narażone na odkształcenia zginające nazywa się umownie (w trakcie obliczeń) belkami. Na rysunku 5.24 przedstawiono tzw. czyste zginanie w belce.

Czyste zginanie zachodzi wtedy, gdy belka jest poddana działaniu dwóch par sił o równych momentach, lecz przeciwnie zwróconych. Podobnie jak w przypadku ścinania, czyste zginanie bardzo rzadko występuje w rzeczywistych elementach samochodu, gdyż są one najczęściej obciążone siłami zewnętrznymi o różnych wartościach. Zginanie pod wpływem różnych sił działających na belkę nazywamy **zginaniem złożonym**.

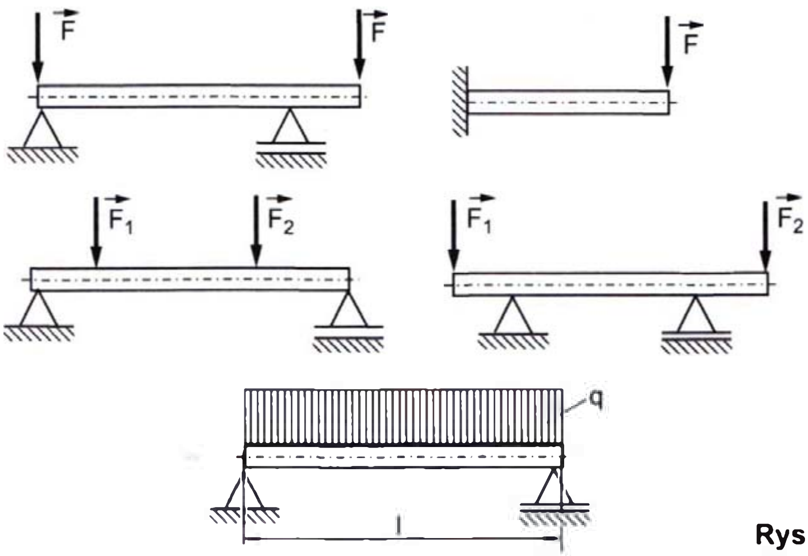
Belki mogą być obciążone dwoma rodzajami obciążeń: znanymi nam już siłami skupionymi i tzw. obciążeniem ciągłym.

- **Siła skupiona** to obciążenie przyłożone w jednym punkcie lub rozłożone na bardzo małym odcinku.
- **Obciążenie ciągłe** to obciążenie rozłożone równomiernie na znacznej długości. Przykładem obciążenia ciągłego dla wałka w skrzynce biegów jest jego ciężar równomiernie rozłożony na całej jego długości. W budownictwie bardzo często podaje się przykład belki sufitowej obciążonej równomiernie ułożonymi na niej cegłami.



Rys. 5.24. Zginanie belki

Na rysunku 5.25 przedstawiono przykłady obciążenia siłą skupioną wałka w skrzynce biegów oraz belki sufitowej obciążonej cegłami (obciążenie ciągłe).



Rys. 5.25. Przykłady obciążeń belek

Obciążenie ciągłe oznacza się symbolem q, a jego jednostką jest N/m. Wartość całkowitej siły obciążającej pochodzącej od obciążenia ciągłego jest zależna od długości belki l. Im dłuższa belka, tym całkowita siła obciążająca belkę będzie większa. Wartość całkowitej siły obciążającej pochodzącej od obciążenia ciągłego można wyznaczyć ze wzoru:

$$Q = q\,l \qquad (5.61)$$

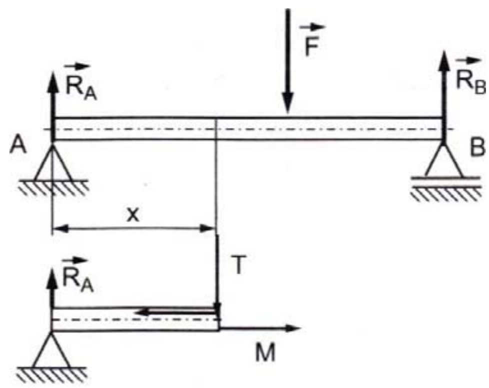
gdzie:
q – obciążenie ciągłe,
l – długość belki.

Przedstawione na rysunku 5.25 belki są tzw. **belkami statycznie wyznaczalnymi**, dla których liczba podpór jest równa liczbie równań równowagi. Istnieją jednak inne belki, np. wielopodporowe, których nie da się wyznaczyć (czyli obliczyć wszystkich sił działających na belkę) z zastosowaniem równań statyki. Takie belki nazywa się statycznie niewyznaczalnymi. Belki statycznie niewyznaczalne nie będą przedmiotem naszych rozważań.

5.14.2. Moment gnący i siła tnąca

Podobnie jak w przypadku rozciągania, analiza belki zginanej zostanie przeprowadzona po jej umownym podziale na dwie części (rys. 5.26).

W celu zachowania równowagi przeciętej lewej części belki działająca na tę część siła R_A musi zostać zrównoważona siłą T o równej wartości, lecz przeciwnie zwróconą. Mimo zrównoważenia tej części belki siłą belka dalej pozostaje nie zrównoważona, gdyż działa na nią powstała para sił utworzona przez siły R_A i T. Moment pary sił dąży do obrócenia rozpatrywanej części zgodnie z ruchem wskazówek zegara wokół podpory A. Ten moment pary sił musi więc zostać zrównoważony przeciwnie zwróconym momentem M_g o wartości:



Rys. 5.26. Zginanie belki

$$M_g = R_A\, x, \tag{5.62}$$

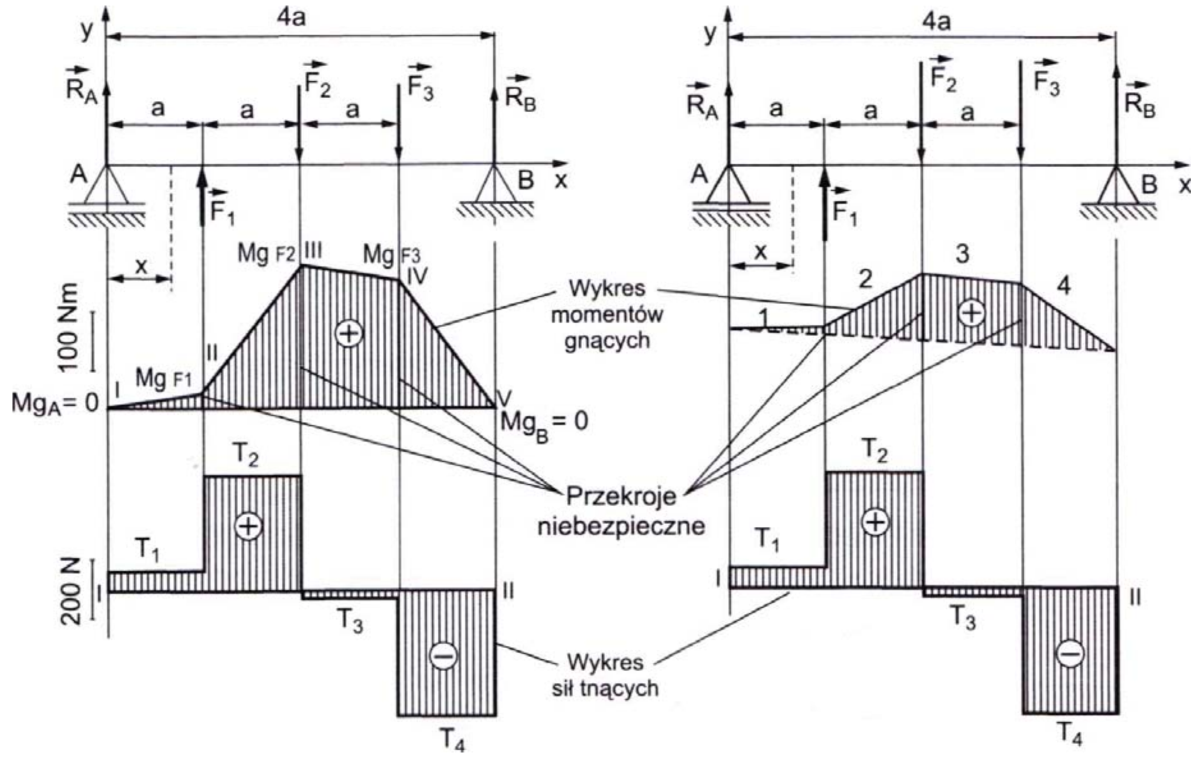
gdzie x – odległość od podpory A do rozpatrywanego przekroju belki.

Moment równoważący w danym przekroju zginaną belkę nazywa się **momentem gnącym**. Siła równoważąca w danym przekroju zginaną belkę nazywa się **siłą tnącą** T.

Na podstawie wyliczonych momentów gnących i sił tnących można wyznaczyć, np. w wałku pośrednim skrzyni biegów, tzw. przekroje niebezpieczne, a na ich bazie zaprojektować średnice wałka (patrz rys. 5.27). Przekroje niebezpieczne są to miejsca w wale obciążone maksymalnym momentem gnącym lub siłą tnącą. Miejsca te są najbardziej narażone na zniszczenie pod wpływem obciążeń – stąd ich nazwa: przekroje niebezpieczne. W wałach obciążonych siłami skupionymi przyjmuje się, że przekroje niebezpieczne występują w miejscach przyłożenia sił i w tych właśnie miejscach oblicza się momenty gnące M_g i siły tnące T.

Do obliczania momentów i sił tnących w poszczególnych przekrojach wału przyjęto pewne ustalenia pozwalające na jednoznaczne wyznaczanie tych wielkości.

Momentem gnącym w dowolnym przekroju belki nazywa się sumę algebraiczną momentów wszystkich sił zewnętrznych działających po jednej stronie rozważanego przekroju, względem środka tego przekroju.



Rys. 5.27. Przekroje niebezpieczne

Siłą tnącą w dowolnym przekroju belki jest suma algebraiczna wszystkich sił zewnętrznych działających prostopadle do osi belki, po jednej stronie rozważanego przekroju.

Moment gnący przyjmuje się za **dodatni**, gdy wygina belkę wypukłością ku dołowi. Moment zginający uważa się za **ujemny**, gdy wygina belkę wypukłością ku górze.

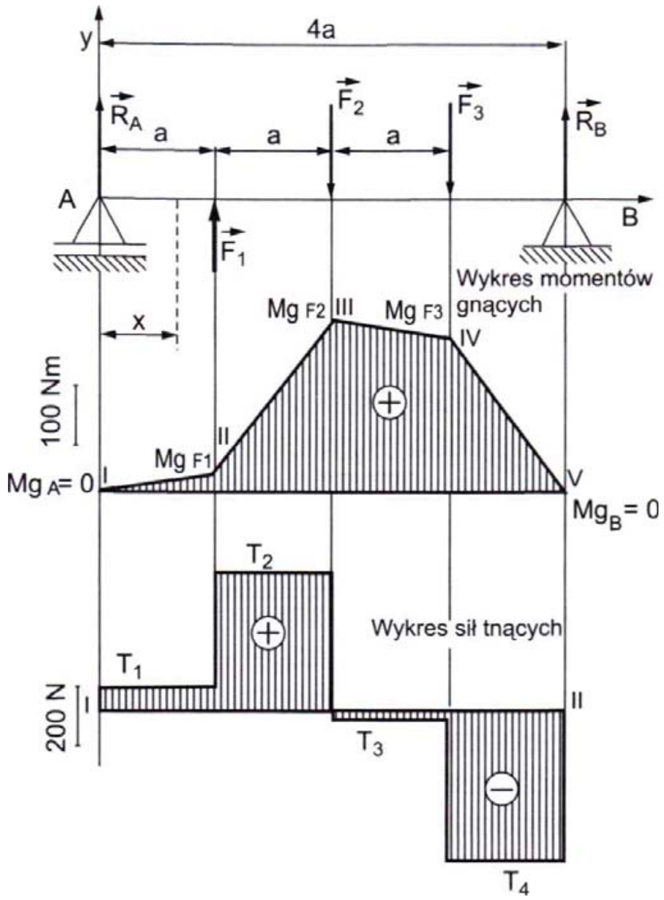
Sumując siły tnące po lewej stronie przekroju – siły zwrócone do góry uważa się za dodatnie, a zwrócone w dół za ujemne. Sumując siły tnące po prawej stronie przekroju – siły zwrócone do góry uważa się za ujemne, a zwrócone w dół za dodatnie.

5.14.3. Analityczny sposób wyznaczania momentów gnących i sił tnących w belce obciążonej siłami skupionymi

Analityczny sposób wyznaczania momentów gnących i sił tnących zostanie przedstawiony na przykładzie obciążonej belki, przedstawionej na rysunku 5.28.

Na schematycznych rysunkach obliczeniowych belkę zastępuje się pogrubioną linią nie uwzględniającą wymiarów poprzecznych belki. Belka jest obciążona siłami: F_1 = 400 N; F_2 = 500 N; F_3 = 500 N. Odległość *a* między punktami oddziaływania sił wynosi 0,5 m.

Sposób postępowania jest następujący.



Rys. 5.28. Wykres momentów gnących i sił tnących

1. Ze znanych ze statyki warunków równowagi wyznacza się wartości reakcji R_A i R_B:

   $\Sigma F_{iy} = 0 \rightarrow R_A + F_1 - F_2 - F_3 + R_B = 0$ – suma rzutów na oś y,

   $\Sigma M_{iA} = 0 \rightarrow F_1\, a - F_2 \cdot 2a - F_3 \cdot 3a + R_B \cdot 4a = 0$ – suma momentów względem punktu A.

   Z drugiego równania można wyznaczyć R_B:

$$R_B = \frac{-F_1\, a + F_2 \cdot 2a + F_3 \cdot 3a}{4a};$$

$$R_B = \frac{-400\text{ N} \cdot 0{,}5\text{ m} + 500\text{ N} \cdot 2 \cdot 0{,}5\text{ m} + 500\text{ N} \cdot 3 \cdot 0{,}5\text{ m}}{4 \cdot 0{,}5\text{ m}}$$

$$R_B = 525\text{ N}$$

a z pierwszego równania R_A:

$R_A = -F_1 + F_2 + F_3 - R_B$;

$R_A = -400\text{ N} + 500\text{ N} + 500\text{ N} - 525\text{ N}$;

$R_A = 75\text{ N}$

2. Po wyznaczeniu momentów gnących w przekrojach niebezpiecznych rysuje się wykres momentów gnących.

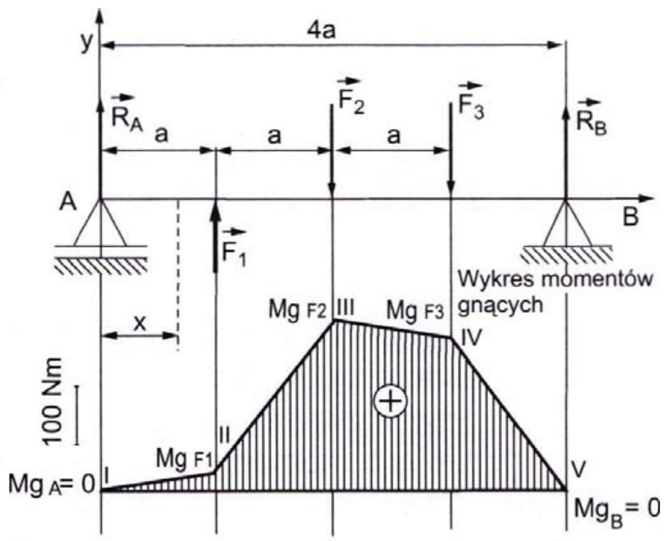
   Momenty gnące wyznacza się, rozpoczynając od lewej strony, uwzględniając poznane wcześniej zasady:

– moment gnący w dowolnym przekroju belki stanowi sumę algebraiczną momentów wszystkich sił zewnętrznych działających po jednej stronie rozważanego przekroju względem środka tego przekroju;
– moment zginający dodatni wygina belkę wypukłością ku dołowi;
– moment zginający ujemny wygina belkę wypukłością ku górze.

W powyższym przykładzie obciążonej belki (patrz rys. 5.28 i 5.29) moment gnący w przekroju odległym od lewej podpory o odcinek x wyznacza się w następujący sposób:
– po lewej stronie od przekroju w odległości x leży tylko jedna siła R_A i to ona będzie tworzyła moment gnący w rozpatrywanym przekroju;
– moment jest dodatni, gdyż siła R_A zaczepiona na ramieniu x wygina belkę wypukłością do dołu;
– wartość momentu jest iloczynem siły R_A i jej odległości (ramienia x) od rozpatrywanego przekroju:

$$M_{gx} = R_A x$$

Następnie określa się momenty gnące w przekrojach niebezpiecznych oznaczonych cyframi rzymskimi I–V (patrz rys. 5.28 i rys. 5.29)



Rys. 5.29. Wykres momentów gnących

I. $M_{gA} = 0$, gdyż rozważany przekrój jest przekrojem brzegowym belki, a w takich przekrojach momenty gnące są równe zero, ponieważ po lewej stronie nie występuje żadna siła mogąca wytworzyć moment i ramię momentu jest równe zero.

II. M_{gF1} wyznacza się zgodnie z podanym wyżej przykładem.
Po lewej stronie od rozważanego przekroju leży tylko jedna siła R_A i to ona będzie tworzyła moment gnący w rozpatrywanym przekroju; moment jest dodatni, gdyż siła R_A zaczepiona na ramieniu a wygina belkę wypukłością do dołu; wartość momentu jest iloczynem siły R_A i jej odległości a od rozpatrywanego przekroju, czyli:

$$M_{gF1} = R_A \cdot a = 75 \text{ N} \cdot 0{,}5 \text{ m} = 37{,}5 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

III. M_{gF2} wyznacza się identycznie jak M_{gF1}.
Po lewej stronie od rozważanego przekroju leżą siły R_A i F_1 tworzące moment gnący w rozpatrywanym przekroju; momenty od obu sił są dodatnie, gdyż zarówno siła R_A zaczepiona na ramieniu 2a, jak i siła F_1 zaczepiona na ramieniu a wyginają belkę wypukłością do dołu; wartość momentu M_{gF2} jest sumą algebraiczną momentów od sił R_A i F_1 względem rozpatrywanego przekroju:

$$M_{gF2} = R_A \cdot 2a + F_1 \cdot a = 75 \text{ N} \cdot 1 \text{ m} + 400 \text{ N} \cdot 0{,}5 \text{ m} = 275 \text{ N} \cdot \text{m}$$

IV. M_{gF3} można wyznaczyć na dwa sposoby – rozpatrując siły działające po lewej stronie od rozważanego przekroju albo biorąc pod uwagę siły leżące po jego prawej stronie.
– Moment M_{gF3} dla sił leżących po lewej stronie przekroju
Po lewej stronie od rozważanego przekroju leżą siły R_A, F_1 i F_2 wywołujące moment gnący w rozpatrywanym przekroju: siła R_A zaczepiona na ramieniu 3*a*, siła F_1 zaczepiona na ramieniu 2*a*, siła F_2 zaczepiona na ramieniu a. Momenty od obu sił R_A i F_1 są dodatnie, gdyż zarówno siła R_A, jak i siła F_1 wyginają belkę wypukłością do dołu.
Moment od siły F_2 jest ujemny, gdyż siła F_2 wygina belkę wypukłością do góry. Wartość momentu M_{gF3} wyznacza się jako sumę algebraiczną momentów od sił R_A i F_1 względem rozpatrywanego przekroju:

$$M_{gF3} = R_A \cdot 3a + F_1 \cdot 2a - F_2 a =$$
$$= 75\ \mathrm{N} \cdot 1{,}5\ \mathrm{m} + 400\ \mathrm{N} \cdot 1\ \mathrm{m} - 500\ \mathrm{N} \cdot 0{,}5\ \mathrm{m} = 262{,}5\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$$

– Moment M_{gF3} dla sił leżących po prawej stronie przekroju
Po prawej stronie od rozważanego przekroju leży tylko jedna siła R_B i to ona będzie tworzyła moment gnący w rozpatrywanym przekroju; moment jest dodatni, gdyż siła R_B zaczepiona na ramieniu *a* wygina belkę wypukłością do dołu; wartość momentu jest iloczynem siły R_A i jej odległości *a* do rozpatrywanego przekroju:

$$M_{gF1} = R_b\, a = 525\ \mathrm{N} \cdot 0{,}5\ \mathrm{m} = 262{,}5\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$$

W obu przypadkach wynik wyszedł taki sam, co potwierdza poprawność obliczeń i zasad przyjętych do analizy.

V. $M_{gB} = 0$, gdyż rozważany przekrój jest przekrojem brzegowym belki, a w takich przekrojach momenty gnące są równe zero: po jego prawej stronie nie występuje żadna siła mogąca wytworzyć moment gnący, ramię momentu jest równe zero.

Budowa i rysowanie wykresu momentów gnących

W celu zbudowania wykresu momentów gnących przyjmuje się pewną długość odcinka, która odpowiada wartości momentu zginającego, np. 100 N · m. W powyższym przykładzie obciążonej belki (patrz rys. 5.28 i 5.29) przyjęto, że długości 1 cm odpowiada wartość 100 N · m.

Na poziomej osi, w rozpatrywanych przekrojach I–V, odkłada się pionowe odcinki odpowiadające w przyjętej podziałce wartościom momentów gnących, przyjmując zasadę, że dodatnie wartości momentów będą odkładane powyżej obranej osi, a ujemne poniżej osi (patrz rys. 5.28). Następnie, łącząc liniami końce odłożonych odcinków, uzyskuje się wykres momentów gnących działających na belkę. Pole wykresu zakreskowuje się pionowymi cienkimi liniami. Z wykresu można odczytać, że największy moment zginający występuje w przekroju działania siły F_2. Ten przekrój jest niebezpiecznym przekrojem belki, najbardziej narażonym na zniszczenie pod wpływem momentu gnącego.

Wyznaczanie sił tnących działających na belkę

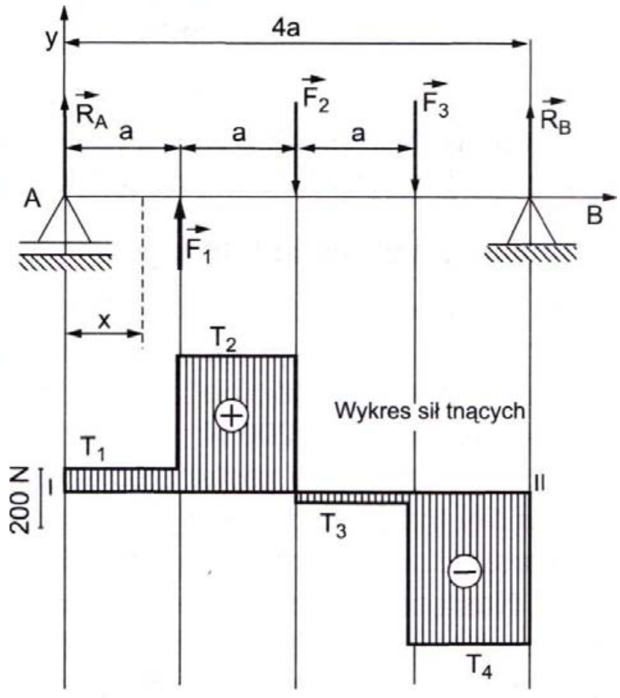
Siły tnące w przykładzie obciążonej belki (patrz rys. 5.28) będą wyznaczane w przedziałach, idąc od lewej strony, z uwzględnieniem poznanych wcześniej zasad:
- siłą tnącą w dowolnym przekroju belki nazywa się sumę algebraiczną wszystkich sił zewnętrznych działających prostopadle do osi belki po jednej stronie rozważanego przekroju;
- sumując siły tnące po lewej stronie przekroju, przyjmuje się siły zwrócone do góry za dodatnie, a zwrócone w dół za ujemne;
- sumując siły tnące po prawej stronie przekroju, przyjmuje się siły zwrócone do góry za ujemne, a zwrócone w dół za dodatnie.

Przedziałami, w których będą wyznaczane siły tnące, będą odcinki belki między punktami przyłożenia sił skupionych (patrz rys. 5.28 i rys. 5.30).

I. Przedział od podpory A do miejsca działania siły F_1
Na lewo od miejsca działania siły F_1 leży tylko jedna siła R_A, więc siła tnąca T_1 jest równa wartości reakcji R_A

$$T_1 = R_A = 75 \text{ N}$$

Siła tnąca T_1 jest dodatnia, gdyż przy sumowaniu sił tnących znajdujących się na lewo od miejsca działania siły F_1 siły zwrócone do góry mają wartość dodatnią. W tym przypadku występuje tylko siła R_A zwrócona do góry.



Rys. 5.30. Wykres sił tnących

II. Przedział od miejsca działania siły F_1 do miejsca działania siły F_2
Na lewo od miejsca działania siły F_2 leżą siły R_A i F_1. Przy sumowaniu sił tnących znajdujących się na lewo od miejsca działania siły F_2 – siły R_A i F_1 są dodatnie, gdyż są zwrócone do góry. Siłę tnącą T_2 wyznacza się ze wzoru:

$$T_2 = R_A + F_1 = 75 \text{ N} + 400 \text{ N} = 475 \text{ N}$$

III. Przedział od siły F_2 do miejsca działania siły F_3
Na lewo od miejsca działania siły F_3 leżą siły R_A, F_1 i F_2. Przy sumowaniu sił tnących znajdujących się na lewo od miejsca działania siły F_2 – siły R_A i F_1 są dodatnie, gdyż są zwrócone do góry, a siła F_2 jest ujemna, gdyż jest zwrócona do dołu. Siłę tnącą T_3 można wyznaczyć ze wzoru:

$$T_3 = R_A + F_1 - F_2 = 75 \text{ N} + 400 \text{ N} - 500 \text{ N} = -25 \text{ N}$$

IV. Przedział od siły F_3 do miejsca działania siły R_B.
Siłę tnącą T_3 można wyznaczyć na dwa sposoby przez sumowanie – jak do tej pory – sił z lewej strony lub sumowanie z prawej strony.
– Sumowanie sił z lewej strony.
Na lewo od miejsca działania siły R_B leżą siły R_A, F_1, F_2 i F_3.
Przy sumowaniu sił tnących znajdujących się na lewo od miejsca działania siły R_B – siły R_A i F_1 są dodatnie, gdyż są zwrócone do góry, a siły F_2 i F_3 są ujemne, gdyż są zwrócone do dołu. Siłę tnącą T_4 wyznacza się z wzoru:

$$T_2 = R_A + F_1 - F_2 - F_3 = 75\ \text{N} + 400\ \text{N} - 500\ \text{N} - 500\ \text{N} = -525\ \text{N}$$

– Sumowanie sił z prawej strony.
Na prawo od miejsca działania siły F_3 leży siła R_B, więc siła tnąca T_4 jest równa wartości reakcji R_B. Siła tnąca T_4 jest ujemna, gdyż przy sumowaniu sił tnących znajdujących się na prawo od miejsca działania siły F_3 – siły zwrócone do góry mają wartość ujemną. W tym przypadku występuje tylko siła R_B zwrócona do góry. Wartość siły tnącej T_4 będzie więc wynosiła:

$$T_4 = -R_B = -525\ \text{N}$$

W obu przypadkach wynik wyszedł taki sam, potwierdzając poprawność obliczeń i przyjętych zasad podanych na początku rozdziału.

Rysowanie wykresu sił tnących

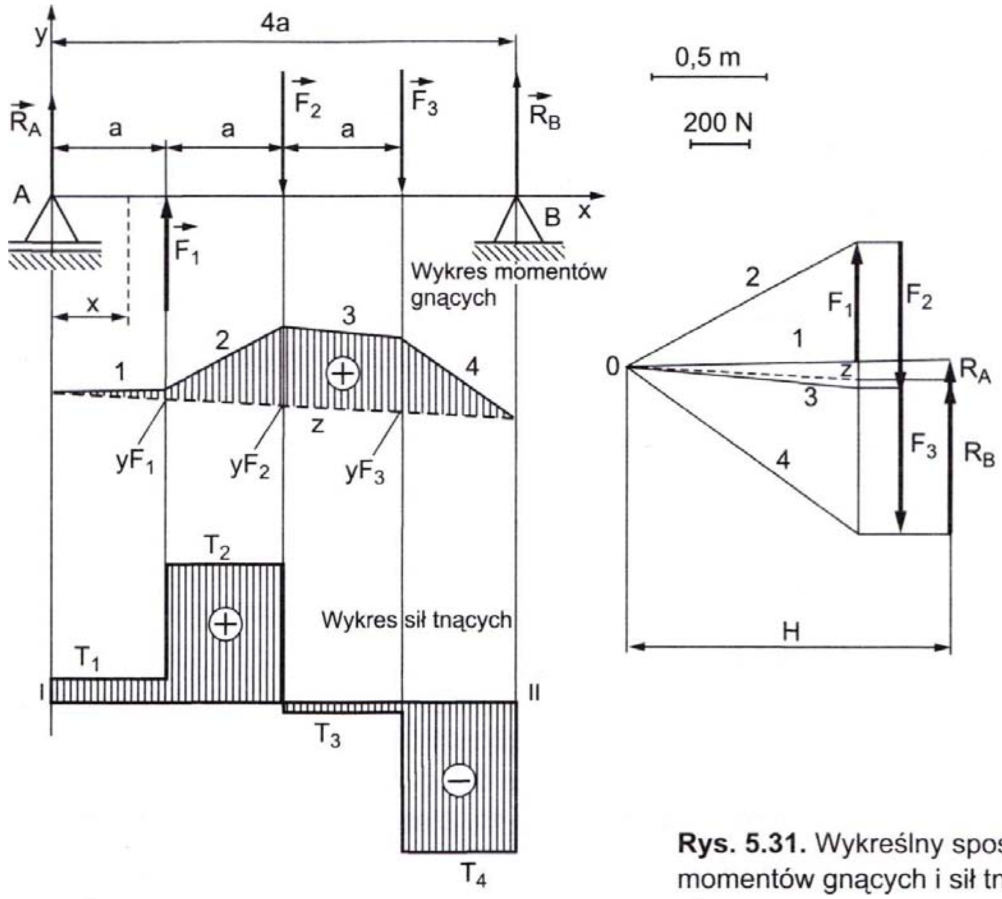
Przed sporządzeniem wykresu sił tnących, podobnie jak przy wykresie momentów gnących, przyjmuje się skalę, czyli pewną długość odcinka, która odpowiada wartości siły tnącej, np. 100 N. W tym przykładzie długości 1 cm będzie odpowiadać wartość 200 N · m (patrz też rys. 5.28 i 5.30).

Na poziomej osi I–II zostaną odłożone pionowe odcinki przedstawiające w podziałce siły tnące w rozpatrywanych przedziałach, przyjmując zasadę, że dodatnie wartości sił tnących będą odkładane powyżej obranej osi, a ujemne poniżej tej osi. Następnie, po połączeniu liniami końców odłożonych odcinków uzyska się wykres sił tnących działających na belkę (patrz rys. 5.28). Pole wykresu należy zakreskować pionowymi cienkimi liniami. Z wykresu można odczytać, że największa siła tnąca występuje w przedziale od miejsca działania siły F_3 do miejsca działania siły R_B. Ten przekrój jest więc niebezpiecznym przekrojem belki, najbardziej narażonym na zniszczenie pod wpływem siły tnącej.

Wykresy sił tnących belek obciążonych siłami skupionymi składają się z odcinków prostych równoległych do przyjętej osi poziomej.

5.14.4. Wykreślny sposób wyznaczania momentów gnących w belce obciążonej siłami skupionymi

Przyjmując to samo zadanie, jak dla metody analitycznej, podamy sposób wykreślnego wyznaczania wartości momentów gnących na przykładzie belki (patrz rys. 5.31) obciążonej siłami: F_1 = 400 N, F_2 = 500 N, F_3 = 500 N, przy czym odległości a między siłami wynoszą 0,5 m. Ze względu na wymaganą dużą dokładność metody wykreślnej, której nie można w pełni oddać w książce, przedstawiono tylko sposób wykreślnego wyznaczania wartości momentów gnących, nie dokonując obliczeń, gdyż użyte w tej metodzie wielkości geometryczne i podziałki w druku mogą zmienić swoje wartości.



Rys. 5.31. Wykreślny sposób wyznaczania momentów gnących i sił tnących

Za pomocą znanej nam już metody należy wykreślić wielobok sił, a następnie wielobok sznurowy, dzięki czemu zostaną wyznaczone reakcje R_A i R_B.

Wartość momentu gnącego w danym przekroju oblicza się z następującego wzoru:

$$M_g = p_b\, p_s\, H\, y \tag{5.63}$$

gdzie:

M_g – moment gnący w N · m;

p_b – podziałka długości belki, czyli liczba oznaczająca, jaką długość w metrach przedstawia 1 cm na rysunku;

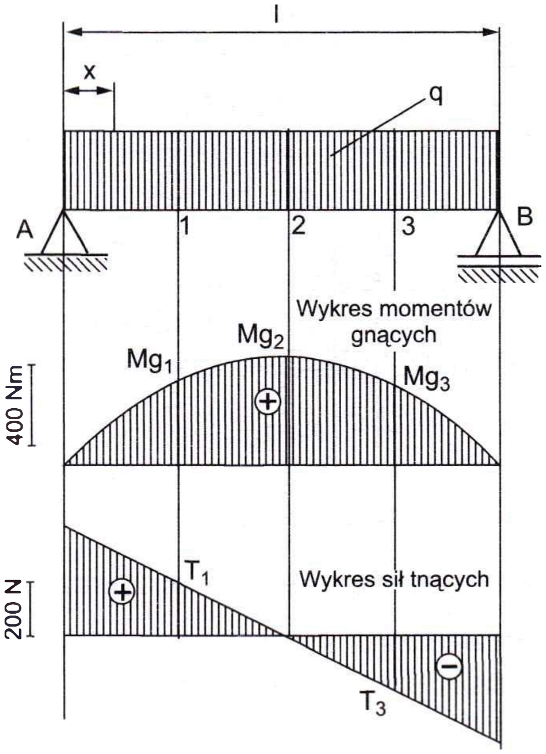
p_s – podziałka siły, czyli liczba oznaczająca, jakiej sile w niutonach odpowiada 1 cm na rysunku;

H – odległość zaznaczona na rysunku zwana odległością biegunową;

y – wysokość (rzędna) wykresu momentów w rozważanym przekroju, np. yF_1, yF_2...

5.14.5. Analityczny sposób wyznaczania momentów gnących w belce z obciążeniem ciągłym

Momenty gnące w belce z obciążeniem ciągłym zostaną wyznaczone na przykładzie belki o długości l = 8 m obciążonej obciążeniem ciągłym q = 1000 N/m, jak na rysunku 5.32.



Rys. 5.32. Analityczny sposób wyznaczania momentów gnących w belce z obciążeniem ciągłym

1. Ze znanych ze statyki warunków równowagi wyznaczamy wartości reakcji R_A i R_B.
   W przypadku obciążenia ciągłego przyjmuje się, że obciążenie ciągłe jest skupione w środku ciężkości obciążenia. Siła skupiona pochodząca od obciążenia ciągłego q będzie równa iloczynowi $q\, l$.
   Reakcje zostaną wyznaczone z dwóch warunków równowagi:

$$R_A - q\, l + R_B = 0 \text{ – suma rzutów na oś belki,} \tag{5.64}$$

$$-q\, l\, \frac{l}{2} + R_B\, l = 0 \text{ – suma momentów względem punktu } A. \tag{5.65}$$

Z drugiego równania można wyznaczyć R_B:

$$R_B = \frac{ql}{2}$$

$$R_B = \frac{1000 \cdot 8}{2} \frac{\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{m}};$$

$$R_B = 4000 \text{ N}$$

Z pierwszego równania R_A:

$$R_A = q\,l - R_B$$

$$R_A = 1000\ \mathrm{N/m} \cdot 8\ \mathrm{m} - 4000\ \mathrm{N}$$

$$R_A = 4000\ \mathrm{N}$$

2. Wyznaczamy momenty gnące w przekrojach niebezpiecznych oraz rysujemy wykres momentów gnących.
   Momenty gnące będziemy wyznaczali od lewej strony, pamiętając o poznanych wcześniej zasadach:
   - moment gnący w dowolnym przekroju belki stanowi sumę algebraiczną momentów wszystkich sił zewnętrznych działających po jednej stronie rozważanego przekroju względem środka tego przekroju;
   - moment gnący uważamy za dodatni, gdy wygina belkę wypukłością ku dołowi;
   - moment gnący uważamy za ujemny, gdy wygina belkę wypukłością ku górze.

   W celu wyznaczenia momentów gnących przy obciążeniu ciągłym belka zostanie podzielona umownie na cztery części – w ten sposób powstaną trzy przekroje belki *1*, *2*, *3*, w których będą wyznaczane momenty gnące. Przekroje są oddalone od siebie o $l/4$ długości belki.
   Moment gnący w miejscu oddalonym o odległość x od podpory będą tworzyły dwie leżące po jego lewej stronie siły – siła reakcji R_A i siła $q\,x$ pochodząca od części obciążenia ciągłego na rozpatrywanym odcinku skupionego w odległości $x/2$. Siła $q\,x$, jako siła ciężkości, jest skierowana do dołu. Moment od siły R_A jest dodatni, gdyż siła R_A zaczepiona na ramieniu x wygina belkę wypukłością do dołu, a od siły $q\,x$ ujemny, gdyż zaczepiona na ramieniu $x/2$ wygina belkę wypukłością do góry. Moment zginający w rozpatrywanym przekroju będzie wynosił:

$$M_{gx} = R_A\,x - q\,x\,\frac{x}{2} \tag{5.66}$$

czyli

$$M_{gx} = R_A\,x - q\,\frac{x^2}{2} \tag{5.67}$$

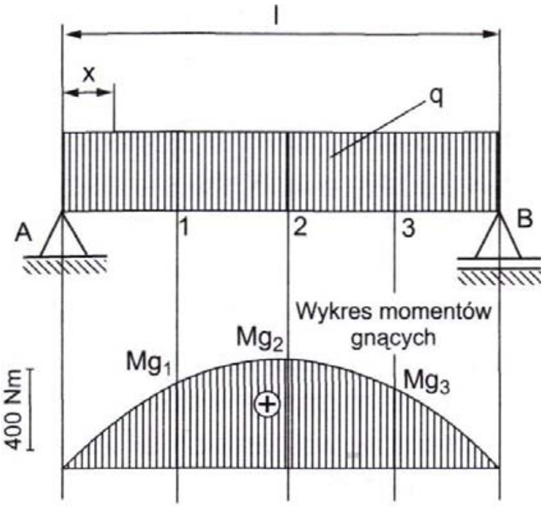
gdzie $x/2$ stanowi ramię działania siły $q\,x$.

Z powyższego wzoru wynika, że wykresem momentów zginających belki obciążonej obciążeniem ciągłym będzie część paraboli (wykres funkcji kwadratowej).

Wartości momentów gnących w charakterystycznych przekrojach belki z obciążeniem ciągłym (patrz rys. 5.32 i 5.33) będą następujące.

I. $M_{gA} = 0$, gdyż rozważany przekrój jest przekrojem brzegowym belki, a w takich przekrojach momenty gnące są równe zero, bo po lewej stronie nie występuje żadna siła mogąca wytworzyć moment zginający, ramię momentu jest równe zero.

II. M_{g1} – moment gnący w rozpatrywanym przekroju będą tworzyły dwie leżące po jego lewej stronie siły: siła reakcji R_A i siła $ql/4$ pochodząca od części obciążenia ciągłego na rozpatrywanym odcinku skupionego w odległości 1/8 l od rozpatrywanego przekroju. Moment od siły R_A jest dodatni, gdyż siła R_A zaczepiona na ramieniu $l/4$ wygina belkę wypukłością do dołu, a od siły qx ujemny, gdyż zaczepiona na ramieniu $l/8$ wygina belkę wypukłością do góry. Moment gnący w rozpatrywanym przekroju wynosi:



Rys. 5.33. Wykres momentów gnących

$$M_{g1} = R_A \frac{l}{4} - q \frac{l}{4} \frac{l}{8}$$

$$M_{g1} = 4000\ \text{N} \cdot \frac{8\ \text{m}}{4} - 1000 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot \frac{8\ \text{m}}{4} \cdot \frac{8\ \text{m}}{8}$$

$$M_{g1} = 6000\ \text{N} \cdot \text{m}$$

III. M_{g2} – po lewej stronie od rozważanego przekroju leżą: siła reakcji R_A i siła $ql/2$ pochodząca od części obciążenia ciągłego na rozpatrywanym odcinku skupionego w odległości $l/4$ od rozpatrywanego przekroju. Moment od siły R_A jest dodatni, gdyż siła R_A zaczepiona na ramieniu $l/2$ wygina belkę wypukłością do dołu, a od siły qx ujemny, gdyż zaczepiona na ramieniu $l/4$ wygina belkę wypukłością do góry. Moment zginający w rozpatrywanym przekroju wyznaczymy więc w następujący sposób:

$$M_{g1} = R_A \frac{l}{2} - q \frac{l}{2} \frac{l}{4}$$

$$M_{g1} = 4000\ \text{N} \cdot \frac{8\ \text{m}}{2} - 1000 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot \frac{8\ \text{m}}{2} \cdot \frac{8\ \text{m}}{4}$$

$$M_{g1} = 8000\ \text{N} \cdot \text{m}$$

IV. M_{g3} – po lewej stronie od rozważanego przekroju leżą siły: siła reakcji R_A i siła $q \cdot 3/4\ l$ pochodząca od części obciążenia ciągłego na rozpatrywanym odcinku skupionego w odległości 3/8 l od rozpatrywanego przekroju. Moment od siły R_A jest dodatni, gdyż siła R_A zaczepiona na ramieniu 3/4 l wygina belkę wypukłością do dołu, a od siły qx ujemny, gdyż zaczepiona na ramieniu 3/4 l wygina belkę wypukłością do góry. Moment zginający w rozpatrywanym przekroju będzie wynosił:

$$M_{g1} = R_A \frac{3}{4} l - q \frac{3}{4} l \frac{3}{8} l$$

$$M_{g1}=4000\ \text{N}\cdot\frac{3}{4}\cdot 8\ \text{m}-1000\frac{\text{N}}{\text{m}}\cdot\frac{3}{4}\cdot 8\ \text{m}\cdot\frac{3}{8}\cdot 8\ \text{m}$$

$$M_{g1} = 6000\ \text{N}\cdot\text{m}$$

V. $M_{gB} = 0$, gdyż rozważany przekrój jest przekrojem brzegowym belki, a w takich przekrojach momenty gnące są równe zero: po jego prawej stronie nie występuje żadna siła mogąca wytworzyć moment zginający; ramię momentu jest równe zero.

3. Rysujemy wykres momentów gnących belki z obciążeniem ciągłym (rys 5.32 i 5.33). Przed rozpoczęciem kreślenia należy przyjąć pewną skalę, czyli długość odcinka odpowiadającego wartości momentu zginającego, np. 100 N · m. W tym przykładzie przyjęto, że 1 cm odpowiada wartości 200 N · m.
   Na poziomej osi odkłada się pionowe odcinki przedstawiające – w podziałce – momenty gnące w rozpatrywanych przekrojach. Końce odłożonych odcinków będą stanowiły punkty, przez które przechodzi parabola wykresu momentów. Pole wykresu kreskuje się pionowymi cienkimi liniami. Z wykresu można odczytać, że największy moment gnący występuje w przekroju *2* działania, czyli na środku belki. Ten przekrój jest więc niebezpiecznym przekrojem belki najbardziej narażonym na zniszczenie pod wpływem momentu gnącego.
4. Wyznaczamy siły tnące i rysujemy wykres sił tnących w belce z obciążeniem ciągłym (patrz rys. 5.32 i 5.34).

Siłę tnącą w oddalonym o dowolną odległość x od podpory A miejscu będą tworzyły dwie leżące po jego lewej stronie siły – siła reakcji R_A i siła qx pochodząca od części obciążenia ciągłego na rozpatrywanym odcinku skupionego w odległości $x/2$. Siła tnąca R_A jest dodatnia, gdyż przy sumowaniu sił tnących znajdujących się na lewo od rozważanego przekroju siły zwrócone do góry mają wartość dodatnią. Siła qx ma wartość ujemną, gdyż jako siła ciężkości jest skierowana do dołu.

Siłę tnąca jako sumę powyższych sił wyznaczymy w następujący sposób:

$$T_x = R_A - q\,x, \tag{5.68}$$

Wykres siły tnącej przy obciążeniu ciągłym jest więc liniową funkcją długości belki x. Dla wyznaczenia wykresu siły tnącej belki obciążonej obciążeniem ciągłym wystarczy wyznaczyć dwa punkty, przez które przechodzi wykres siły tnącej. My wyznaczymy te punkty w podporze A dla $x = 0$ i na środku belki dla $x = l/2$ (patrz rys. 5.32 i 5.34).

Siła T_A w podporze A:

$$T_A = R_A - q\cdot 0 = R_A$$

$$T_A = 4000\ \text{N} - q\cdot 0 = 4000\ \text{N} = R_A$$

Siła T_2 na środku belki:

$$T_2 = R_A - q\frac{l}{2} = 4000 - 1000\cdot\frac{8}{2} = 4000 - 4000 = 0$$

$$T_A = 0$$